平均曲率ベクトル平行曲面 その過去・現在、そして未来 第二部

劔持 勝衛

東北大学

東京　秋葉原, 2 October　2016

2-次元

D. A. Hoffman, Surfaces of constant mean curvature in manifolds of constant curvature, JDG, 8(1973) 161-176 (Received December 20, 1971).

B.Y. Chen, On the surfaces with parallel mean curvature vector, Indiana Univ. J. 22 (1973), 655-666 (Date communicated : June 9,1972).

S.T. Yau, Submanifolds with constant mean curvature, I, II, AJM 96(1974) 346-366 (Recieved June 21, 1972), 97(1975), 76-100 (received July 24, 1972, revised December 13,1972) .

M : 実 2-次元リーマン多様体

D. Hoffman 1973 : $n=4$, B. Y. Chen 1973 , S. T. Yau 1974: $n \geq 4$ は次を証明した

Theorem

$x : M^2 \to R^n$: pmc, $H \neq 0$. そのとき、x は R^n の超球面 $S^{n-1}(c)$ 内の極小曲面、R^3 または $S^3(\tilde{c})$ 内の cmc 曲面

R^n を実空間形に置き換えても成立 (B. Y. Chen, 1973)

問題　より一般な空間で ” 興味ある ”（又は非自明な）pmc 曲面を見つけよ

M : 実 2-次元リーマン多様体

D. Hoffman 1973 : $n = 4$, B. Y. Chen 1973 , S. T. Yau 1974: $n \geq 4$ は次を証明した

Theorem

$x : M^2 \to R^n$: pmc, $H \neq 0$. そのとき、x は R^n の超球面 $S^{n-1}(c)$ 内の極小曲面、R^3 または $S^3(\tilde{c})$ 内の cmc 曲面

R^n を実空間形に置き換えても成立 (B. Y. Chen, 1973)

問題　より一般な空間で ” 興味ある ”（又は非自明な）pmc 曲面を見つけよ

” より一般な空間 ” の候補として、複素空間形、実空間形 $\times R$、実空間形 $\times$ 実空間形、　佐々木空間形

複素空間形の場合

$\overline{M}^n[4\rho]$：複素 n-次元複素空間形　一定正則断面曲率 4ρ

例　$\mathbb{C}P^n$ $(\rho > 0)$, $\mathbb{C}^n(\rho = 0)$, $\mathbb{C}H^n(\rho < 0)$

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ とみると Chen-Yau-Hoffman の定理より新しい曲面族はでないので、以後 $\rho \neq 0$ とする.

M: 実 2 次元リーマン多様体
$x : M \longrightarrow \overline{M}^n[4\rho]$：平均曲率ベクトル平行な等長的はめ込み,
$H \neq 0, \ \rho \neq 0$

複素空間形の場合

$\overline{M}^n[4\rho]$: 複素 n-次元複素空間形　一定正則断面曲率 4ρ

例　$\mathbb{C}P^n$ $(\rho > 0)$, $\mathbb{C}^n(\rho = 0)$, $\mathbb{C}H^n(\rho < 0)$

$\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ とみると Chen-Yau-Hoffman の定理より新しい曲面族はでないので、以後 $\rho \neq 0$ とする.

M: 実 2 次元リーマン多様体
$x : M \longrightarrow \overline{M}^n[4\rho]$: 平均曲率ベクトル平行な等長的はめ込み,
$H \neq 0$, $\rho \neq 0$

第二部: $n = 2$ の場合の非自明な pmc 曲面の存在を示し、分類する

第二部の参考文献

- S. Hirakawa, Constant Gaussian Curvature Surfaces with Parallel Mean curvature Vector in Two-Dimensional Complex Space Forms, Geom. Dedicata **2006**.
- T. Ogata, Surfaces with parallel mean curvature vector in $P^2(C)$, Kodai M.J. 1995, and Correction, Kodai M. J. **2015**.
- K. and D. Zhou, The classification of the surfaces with parallel mean curvature vector in two-dimensional complex space forms, Amer. J. Math. 2000, 295-317, and Correction, Amer. J. Math. **2016**.
- K. , Parallel mean curvature tori in $\mathbb{C}P^2$ and $\mathbb{C}H^2$, to appear in Tohoku Math. J, **2016**.

第二部の主結果

- K. - Zhou: $\mathbb{C}P^2$ ($\mathbb{C}H^2$) 内の pmc 曲面は局所的に一般回転面かまたは一つの調和関数と 5 個の実定数で定まる

第二部の主結果

- K. - Zhou: $\mathbb{C}P^2$ ($\mathbb{C}H^2$) 内の pmc 曲面は局所的に一般回転面かまたは一つの調和関数と 5 個の実定数で定まる
- Chen, 平川 (Hirakawa)：ポアンカレ平面から複素双曲平面へ合同でない 2 つの pmc 埋め込みが存在する

第二部の主結果

- K. - Zhou: $\mathbb{C}P^2$ ($\mathbb{C}H^2$) 内の pmc 曲面は局所的に一般回転面かまたは一つの調和関数と 5 個の実定数で定まる
- Chen, 平川 (Hirakawa) : ポアンカレ平面から複素双曲平面へ合同でない 2 つの pmc 埋め込みが存在する
- 平川 (Hirakawa) : $\mathbb{S}^2$ から $\mathbb{C}P^2$(と $\mathbb{C}H^2$) への $H \neq 0$ pmc はめ込みは存在しない.

第二部の主結果

- K. - Zhou: $\mathbb{C}P^2$ ($\mathbb{C}H^2$) 内の pmc 曲面は局所的に一般回転面かまたは一つの調和関数と 5 個の実定数で定まる
- Chen, 平川 (Hirakawa) : ポアンカレ平面から複素双曲平面へ合同でない 2 つの pmc 埋め込みが存在する
- 平川 (Hirakawa) : $\mathbb{S}^2$ から $\mathbb{C}P^2$(と $\mathbb{C}H^2$) への $H \neq 0$ pmc はめ込みは存在しない.
- K. : トーラスから $\mathbb{C}P^2$ ($\mathbb{C}H^2$) への pmc はめ込みは自明な埋め込み（全実型平坦埋め込み）のみ

Kaehler angle α

$x : M \longrightarrow \overline{M}^2[4\rho]$ のケーラー角度関数 α

$$\cos\alpha := \langle Jx_* e_1, x_* e_2 \rangle$$

Kaehler angle α

$x : M \longrightarrow \overline{M}^2[4\rho]$ のケーラー角度関数 α

$$\cos\alpha := \langle Jx_* e_1, x_* e_2 \rangle$$

$$\alpha \equiv 0 \Leftrightarrow x : \text{ holomorphic}$$
$$\alpha \equiv \pi/2 \Leftrightarrow x : \text{ totally real}$$
$$\alpha \equiv \pi \Leftrightarrow x : \text{ anti-holomorphic}$$

第二基本形式

仮定：$\nabla^{\perp} H = 0$, $|H| := 2b > 0$.

定義：　$e_3 := -H/|H|$.

余次元 2 より, $\exists$: e_4 ： 平行単位法ベクトル

第二基本形式

仮定：$\nabla^{\perp} H = 0,\ |H| := 2b > 0.$

定義：　$e_3 := -H/|H|.$

余次元 2 より, $\exists : e_4$ ： 平行単位法ベクトル

$\{e_3, e_4, Je_3, Je_4\}$ に対しグラム・シュミットの正規直交化法より

$\exists\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ s.t. $\{e_1, e_2\}$ $x(M)$ の接ベクトル

$h^3_{ij},\ h^4_{ij},\ (1 \leq i, j \leq 2)$ x の第二基本形式の成分とすると

$$\frac{h^3_{11} + h^3_{22}}{2} = -2b, \quad \frac{h^4_{11} + h^4_{22}}{2} = 0.$$

M 上の複素数値関数 a, c を次で定義:

$$
\begin{aligned}
2a &:= -\left(\frac{h^3_{11}-h^3_{22}}{2}+h^4_{12}\right)-i\left(\frac{h^4_{11}-h^4_{22}}{2}-h^3_{12}\right),\\
2c &:= -\left(\frac{h^3_{11}-h^3_{22}}{2}-h^4_{12}\right)-i\left(\frac{h^4_{11}-h^4_{22}}{2}+h^3_{12}\right).
\end{aligned}
$$

注意 ・ a と c は M 上の複素数値関数, 実際, M と $\overline{M}[4\rho]$ の向きを固定すると, $\{e_1, e_2, e_3(= -H/|H|), e_4\}$ はユニークに定まる.

M 上の複素数値関数 a, c を次で定義:

$$
\begin{aligned}
2a &:= -\left(\frac{h^3_{11}-h^3_{22}}{2}+h^4_{12}\right)-i\left(\frac{h^4_{11}-h^4_{22}}{2}-h^3_{12}\right), \\
2c &:= -\left(\frac{h^3_{11}-h^3_{22}}{2}-h^4_{12}\right)-i\left(\frac{h^4_{11}-h^4_{22}}{2}+h^3_{12}\right).
\end{aligned}
$$

注意 ・ a と c は M 上の複素数値関数, 実際, M と $\overline{M}[4\rho]$ の向きを固定すると, $\{e_1, e_2, e_3(= -H/|H|), e_4\}$ はユニークに定まる.

・ a と c は $H \equiv 0$ のときは Chern - Wolfson (1983) によって、外側空間が実 4 次元空間形のときは Eschenburg - Tribuzy (1988) によって使用された.

ϕ: M 上の複素 1 次微分形式 s.t. $ds^2 = \phi\bar{\phi}$.

はめ込み x の構造方程式：

$$
(*) \begin{cases}
d\alpha = (a+b)\phi + (\bar{a}+b)\bar{\phi} \\
K = -4(|a|^2 - b^2) + 6\rho\cos^2\alpha, \ (\text{ガウス}) \\
da \wedge \phi = -\left(2a(\bar{a}-b)\cot\alpha + \frac{3}{2}\rho\sin\alpha\cos\alpha\right)\phi\wedge\bar{\phi}, \\
dc \wedge \bar{\phi} = 2c(a-b)\cot\alpha\cdot\phi\wedge\bar{\phi}, \ (\text{コダッチ}) \\
|a|^2 - |c|^2 + \frac{\rho}{2}\left(-2+3\sin^2\alpha\right) = 0, \ (\text{リッチ})
\end{cases}
$$

ここで K は ds^2 に関する M のガウス曲率, $|H| = 2b > 0$.

システム $(*)$ の解法：

場合分け

$x : M \longrightarrow \overline{M}[4\rho]$: pmc はめ込み.

$$\begin{cases} d\alpha \equiv 0 \quad \text{(Chen)} \\ \\ d\alpha \neq 0 \quad \begin{cases} a \equiv \bar{a} \ \text{(K.-Zhou)} \\ a \neq \bar{a} \quad \begin{cases} c \equiv 0 \quad \text{(Hirakawa)} \\ c \neq 0 \ \text{(K.)} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$\alpha =$ 一定

Theorem (Chen, Vrancken 1997)

$x : M \longrightarrow \overline{M}[4\rho]$: a pmc s.t. α が一定*.* そのとき、$K =$ 一定 で、$K \in \{-2b^2, 0, 4b^2\}$*.*

$\alpha =$ 一定

Theorem (Chen, Vrancken 1997)

$x : M \longrightarrow \overline{M}[4\rho]$: *a pmc s.t.* α が一定. そのとき、$K =$ 一定 で、$K \in \{-2b^2, 0, 4b^2\}$.

自明な場合を除いて、興味ある場合は

(**)　$K = -2b^2$: $\alpha = \cos^{-1}\frac{1}{3}$, $a = \bar{a} \equiv -b$, $c \equiv 0$.

後に Chen と田澤 (Y. Tazawa) は (**) のもとで系 (*) を積分してポアンカレ平面から複素双曲平面 $CH^2[-12b^2]$ への pmc はめ込みの座標表示を得た (Chen surface).

注意　$\alpha =$ 一定 であるはめ込みは slant immersion とも呼ばれている

Chen 曲面の座標表示

(∗∗) の積分

$$
\begin{aligned}
&\forall (u,v,t)\in R^3,\\
&z(u,v,t)\\
&\quad = e^{it}\left(1+\frac{3}{2}\left(\cosh\sqrt{\frac{2}{3}}v-1\right)+\frac{u^2}{6}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}v}-i\frac{u}{\sqrt{6}}(1+e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}v}),\right.\\
&\quad \frac{u}{3}(1+2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}v})+\frac{i}{6\sqrt{6}}e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}v}\left((e^{\sqrt{\frac{2}{3}}v}-1)(9e^{\sqrt{\frac{2}{3}}v}-3)+2u^2\right),\\
&\quad \left.\frac{u}{3\sqrt{2}}(1-e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}v})+\frac{i}{12\sqrt{3}}(6-15e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}v}+9e^{\sqrt{\frac{2}{3}}v}+2e^{-\sqrt{\frac{2}{3}}v}u^2)\right)\\
&\quad \in H^5_1(-1)\subset C^3_1:\ \text{anti-de Sitter space-time}
\end{aligned}
$$

$\pi : H^5_1(-1)\to CH^2(-4)$ totally geodesic fibration

Chen surface: $\pi\circ z(u,v,t)$

$d\alpha \neq 0$, $a = \bar{a}$

Lemma (K. and Ogata, Kodai M.J. 2015)

M 上 $a = \bar{a} \Rightarrow \exists \phi = \lambda dz$, $\lambda(u)$: 実数値関数, $z = u + iv$.

$d\alpha \neq 0$, $a = \bar{a}$

Lemma (K. and Ogata, Kodai M.J. 2015)

M 上 $a = \bar{a} \Rightarrow \exists \phi = \lambda dz$, $\lambda(u)$: 実数値関数, $z = u + iv$.

この補題のもとで、次が成立

Theorem (K. and Zhou, AJM 2000)

$x : M \longrightarrow \overline{M}[4\rho]$: *pmc s.t.* $d\alpha \neq 0$, $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}$. もし $\rho \neq 0$ ならば, $\rho = -3b^2$ で

$$\sin^2 \alpha = \frac{4}{9}\left(1 - \frac{a}{b}\right), \quad c = |a + b| e^{it}, \quad (t \in R)$$

.

特に、 $\mathbb{C}P^2$ には、no pmc s.t. $d\alpha \neq 0$, $a = \bar{a}$.

$d\alpha \neq 0$, $a = \bar{a}$

Lemma (K. and Ogata, Kodai M.J. 2015)

M 上 $a = \bar{a} \Rightarrow \exists \phi = \lambda dz$, $\lambda(u)$: 実数値関数, $z = u + iv$.

この補題のもとで、次が成立

Theorem (K. and Zhou, AJM 2000)

$x : M \longrightarrow \overline{M}[4\rho]$: *pmc s.t.* $d\alpha \neq 0$, $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}$. もし $\rho \neq 0$ ならば, $\rho = -3b^2$ で

$$\sin^2 \alpha = \frac{4}{9}\left(1 - \frac{a}{b}\right), \quad c = |a + b|e^{it}, \quad (t \in R)$$

.

特に、 $\mathbb{C}P^2$ には、no pmc s.t. $d\alpha \neq 0$, $a = \bar{a}$.

証明

仮定 $a = \bar{a}$ より、λ, α, a は実変数, u, だけの実数値関数 s.t.

$$\frac{d\lambda}{du} = -2\lambda(u)^2(a(u) - b)\cot\alpha(u)),\ \ \lambda(u) > 0,$$
$$\frac{d\alpha}{du} = 2\lambda(u)(a(u) + b),$$
$$\frac{da}{du} = 2\lambda(u)\{2a(u)(a(u) - b)\cot\alpha(u) + \frac{3}{4}\rho\sin 2\alpha(u)\},$$
$$\log\{\lambda(u)^4(a(u)^2 - \frac{\rho}{2}(3\cos^2\alpha(u) - 1)\} = k_1 u + k_2 \quad (k_1, k_2 \in R).$$

$x = \sin^2 \alpha(u)$ とおくと、上は

$$
(**) \begin{cases}
\frac{d\lambda}{dx} = -\frac{1}{2}\lambda(x)\frac{(a(x)-b)}{(a(x)+b)}\frac{1}{x}, \quad x > 0, \\
\\
\frac{da}{dx} = \frac{(a(x)-b)}{(a(x)+b)}\frac{1}{x} + \frac{3\rho}{4}\frac{1}{(a(x)+b)}, \quad (0 \leq)x_1 < x < x_2 \\
\\
2\rho\lambda(x)\sqrt{1-x}(4(a(x)-b)+9bx) = k_1\sqrt{x}(a(x)^2-\rho+\frac{3}{2}x).
\end{cases}
$$

$x = \sin^2 \alpha(u)$ とおくと、上は

$$(**) \begin{cases} \frac{d\lambda}{dx} = -\frac{1}{2}\lambda(x)\frac{(a(x)-b)}{(a(x)+b)}\frac{1}{x}, \quad x > 0, \\ \\ \frac{da}{dx} = \frac{(a(x)-b)}{(a(x)+b)}\frac{1}{x} + \frac{3\rho}{4}\frac{1}{(a(x)+b)}, \quad (0 \leq) x_1 < x < x_2 \\ \\ 2\rho\lambda(x)\sqrt{1-x}(4(a(x)-b)+9bx) = k_1\sqrt{x}(a(x)^2 - \rho + \frac{3}{2}x). \end{cases}$$

・　上のシステム (**) は等温パラメーター λ と第二基本形式 a をケーラー角度関数 α の関数とみている。

$x = \sin^2 \alpha(u)$ とおくと、上は

$$(**) \begin{cases} \frac{d\lambda}{dx} = -\frac{1}{2}\lambda(x)\frac{(a(x)-b)}{(a(x)+b)}\frac{1}{x}, \quad x > 0, \\ \\ \frac{da}{dx} = \frac{(a(x)-b)}{(a(x)+b)}\frac{1}{x} + \frac{3\rho}{4}\frac{1}{(a(x)+b)}, \quad (0 \leq)x_1 < x < x_2 \\ \\ 2\rho\lambda(x)\sqrt{1-x}(4(a(x)-b)+9bx) = k_1\sqrt{x}(a(x)^2 - \rho + \frac{3}{2}x). \end{cases}$$

・　上のシステム (**) は等温パラメーター λ と第二基本形式 a をケーラー角度関数 α の関数とみている。

アイデア　　ケーラー角度関数 α が定数でないときは、α を M の座標系の一つにとり解析する。

$k_1 = 0$ の場合、$\rho = -3b^2$ が成立し、

$$\frac{d\alpha}{du} = \sqrt{b}\sqrt{8 - 9\sin^2\alpha(u)}$$
$$a = \frac{b}{4}(-5 + 9\cos^2\alpha(u)), \ c = \frac{b}{4}|1 - 9\cos^2\alpha(u)|e^{it}$$

で曲面が定まる。

Lemma (主補題)

$\forall\rho(\neq 0), k_1 \neq 0$, 上の系 $(**)$ は解をもたない。

証明のアイデア：　解があるとして、$x_1 = 0$ を証明. するとシステム $(**)$ は $x = 0$ で特異点をもつが、それを解析して矛盾を導く。

$k_1 = 0$ の場合、$\rho = -3b^2$ が成立し、

$$\frac{d\alpha}{du} = \sqrt{b}\sqrt{8 - 9\sin^2\alpha(u)}$$
$$a = \frac{b}{4}(-5 + 9\cos^2\alpha(u)),\ c = \frac{b}{4}|1 - 9\cos^2\alpha(u)|e^{it}$$

で曲面が定まる。

Lemma (主補題)

$\forall\rho(\neq 0), k_1 \neq 0$, 上の系 (∗∗) は解をもたない。

証明のアイデア：　解があるとして、$x_1 = 0$ を証明. するとシステム (∗∗) は $x = 0$ で特異点をもつが、それを解析して矛盾を導く。

平川の代数的別証明あり　S. Hirakawa, Kodai Math. J. 2002.

$d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a}, c \equiv 0$

平川信也: $K =$ 一定 な pmc 曲面 を分類した. その証明のために $a \neq \bar{a},\ c \equiv 0$ であるシステム $(*)$ を調べた.

Theorem (S. Hirakawa, Geom. Ded. 2006)

$x : M \longrightarrow \overline{M}[4\rho]\ (\rho \neq 0)$: *pmc s.t.* K が一定. そのとき $K = 0$ または $-2b^2$.

- $K = 0$ のとき, x は全実 *(totally real)* 型で $x(M)$ は既知.
- $K = -2b^2$ のとき, $x(M) \subset CH^2(-12b^2)$ で $x(M)$ は *Chen surface*（既出）かまたは次の曲面.

Theorem (Hirakawa 2006)

$\exists$ pmc : ポアンカレ平面 $\Rightarrow \mathbb{C}H^2$ $s.t.$ $d\alpha \neq 0$, $a \neq \bar{a}$.

証明　$a \neq \bar{a}$, $c \equiv 0$ のもとで、$(*)$ を解いて、新しい曲面を発見
平川曲面と呼ぶ（剱持）

Theorem (Hirakawa 2006)

$\exists$ pmc : ポアンカレ平面 $\Rightarrow \mathbb{C}H^2$ $s.t.$ $d\alpha \neq 0$, $a \neq \bar{a}$.

証明 $a \neq \bar{a}$, $c \equiv 0$ のもとで、$(*)$ を解いて、新しい曲面を発見
平川曲面と呼ぶ（剱持）

特徴： 平川曲面は Chen 曲面と等長的、しかし CH^2 内で合同でない。

平川曲面

(1)　$(*)$ with $a \neq \bar{a}$, $c \equiv 0$ の非自明解は $\rho = -3b^2$ のときのみで、次で尽くされる：

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\cos\nu}{3}\right), \quad \lambda = \frac{2\sqrt{9-\cos^2\nu}}{b\sin\nu(-4+\sqrt{2}i\sin\nu)}\frac{\partial\nu}{\partial z},$$

$$a = \frac{b(6\cos^2\nu - 22 + \sqrt{2}i\sin^3\nu)}{2(9-\cos^2\nu)}, \quad c \equiv 0,$$

ν : M 上の調和関数.

(2)　どの非定数調和関数 ν をとっても、得られる曲面は合同, $\nu = 2u, z = u + iv$ とおく（注意　Chen surface は $\nu =$ 定数 の場合）

(3)　このとき　システム $(*)$ は積分できる

平川曲面の座標表示

$$S = \{(u_0, u_1, u_2) \in C^3 : -|u_0|^2 + |u_1|^2 + |u_2|^2 = -1\},$$
$$S^1 = \{e^{it} : t \in R\},\ CH^2(-12b^2) := S/S^1,$$
$$\pi : S \to CH^2(-12b^2) : \text{射影}$$
$$M := (0, \frac{\pi}{2}) \times R \subset R^2,$$
$$ds_M^2 := \frac{2}{b^2 \sin^2 2u}(du^2 + dv^2), \quad (u, v) \in M,$$

$$K = -2b^2$$

平川曲面の座標表示

$X : M \to S$ by

$$ {}^{t}X(u,v) = \frac{\csc 2u}{2\sqrt{1+\cos^2 u}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{v}((3+2\sqrt{2}\cos^2 u + e^{-2iu}) \\ e^{-v}((3-2\sqrt{2}\cos^2 u + e^{2iu}) \\ 4\cos^3 u + 2\sqrt{2}i\sin u \end{pmatrix} $$

$x := \pi \circ X$.

(M, ds^2) は完備で $K = -2b^2$ のポアンカレ平面と等長的

$x : (M, ds^2) \to CH^2(-12b^2)$ が 平川曲面

$d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a},\ c \neq 0$

定義　x：一般型 $\Longleftrightarrow$ $d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a}$

$d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a},\ c \neq 0$

定義　x : 一般型 $\Longleftrightarrow$ $d\alpha \neq 0$, $a \neq \bar{a}$

一般型 pmc 曲面の計算には K. - Zhou, AJM 2000 は一切使わない

$d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a},\ c \neq 0$

定義　x : 一般型 $\Longleftrightarrow$ $d\alpha \neq 0$, $a \neq \bar{a}$

一般型 pmc 曲面の計算には K. - Zhou, AJM 2000 は一切使わない

Theorem (K. AJM, 2016)

$\rho \neq 0$, $H \neq 0$ とする．そのとき、一般型 x は一つの実数値調和関数と 5 個の実定数で定まる

$d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a},\ c \neq 0$

定義　x：一般型 $\Longleftrightarrow$ $d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a}$

一般型 pmc 曲面の計算には K. - Zhou, AJM 2000 は一切使わない

Theorem (K. AJM, 2016)

$\rho \neq 0,\ H \neq 0$ とする．そのとき、一般型 x は一つの実数値調和関数と 5 個の実定数で定まる

仮定に対する注意

- $\rho = 0,\ H \neq 0$：Chen(1973), Hoffman (1973), Yau(1974),

$d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a},\ c \neq 0$

定義　x : 一般型 $\Longleftrightarrow$ $d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a}$

一般型 pmc 曲面の計算には K. - Zhou, AJM 2000 は一切使わない

Theorem (K. AJM, 2016)

$\rho \neq 0$, $H \neq 0$ とする．そのとき、一般型 x は一つの実数値調和関数と 5 個の実定数で定まる

仮定に対する注意

- $\rho = 0$, $H \neq 0$: Chen(1973), Hoffman (1973), Yau(1974),
- $\rho \neq 0$, $H = 0$: Chern-Wofson (1983), Eschenburg-Guadalupe-Tribuzy (1985)

主補題

$$d\alpha \neq 0,\ a \neq \bar{a} \quad \Rightarrow \ a = a(\alpha).$$

主補題の証明

$(*)$ を全微分方程式系になおして外微分をとり、a と α に関するすべての条件をえる.

主補題の証明

$(*)$ を全微分方程式系になおして外微分をとり、a と α に関するすべての条件をえる.

x の余次元 2 と $\rho \neq 0$, から a の 2 階の共変微分 a_{11} が a, a_1 で書き下せる。

主補題の証明

$(*)$ を全微分方程式系になおして外微分をとり、a と α に関するすべての条件をえる.

x の余次元 2 と $\rho \neq 0$, から a の 2 階の共変微分 a_{11} が a, a_1 で書き下せる。

α と a に関する連立方程式がえられ、それを解いて主補題:
$a = a(\alpha)$ を証明する.

第二基本形式 $a(\alpha)$

$a = a(\alpha)$ のコダッチ方程式は α に関して 1 階の常微分方程式:

$$\frac{da}{d\alpha} + \frac{2\cot\alpha}{\overline{a(\alpha)} + b}\left(ba(\alpha) - |a(\alpha)|^2 - \frac{3\rho}{4}\sin^2\alpha\right) = 0$$

よって、$a(\alpha)$ は 2 つの実数, c_1, c_2 で定まる.

第二基本形式 c

$$
\begin{aligned}
c &:= \left(|a|^2 + \frac{\rho}{2}(-2 + 3\sin^2\alpha)\right)^{1/2} e^{i\nu} \\
d\nu &= \frac{1}{2i}\frac{\omega(\alpha, a, \bar{a})\phi - \overline{\omega(\alpha, a, \bar{a})\phi}}{(|a(\alpha)|^2 + \rho/2(-2 + 3\sin^2\alpha))} \\
\omega(\alpha, a, \bar{a}) &= \text{具体的に定義された } \alpha, a, \bar{a} \text{ の有理関数}
\end{aligned}
$$

c は実 1 次形式 $d\nu$ の積分で定まるから、積分定数を c_3 とおく.

ケーラー角度関数 α

$$F(\alpha) := \frac{\left(|a(\alpha) - b|^2 + \frac{3}{2}\rho \sin^2 \alpha\right)}{|a(\alpha) + b|^2} \cot \alpha$$

ケーラー角度関数 α

$$F(\alpha) := \frac{\left(|a(\alpha) - b|^2 + \frac{3}{2}\rho \sin^2 \alpha\right)}{|a(\alpha) + b|^2} \cot \alpha$$

そのとき, α は次式を満たす：

$$\alpha_{z\bar{z}} - F(\alpha)\alpha_z \alpha_{\bar{z}} = 0$$

注意　α が 2 階楕円型偏微分方程式を満たすことは既知.

ケーラー角度関数 α

$$F(\alpha) := \frac{(|a(\alpha) - b|^2 + \frac{3}{2}\rho \sin^2 \alpha)}{|a(\alpha) + b|^2} \cot \alpha$$

そのとき, α は次式を満たす：

$$\alpha_{z\bar{z}} - F(\alpha)\alpha_z\alpha_{\bar{z}} = 0$$

注意　α が 2 階楕円型偏微分方程式を満たすことは既知. 係数が α だけの関数であるところが新しい。

解法

Lemma

$\alpha_{z\bar{z}} - F(\alpha)\alpha_z\alpha_{\bar{z}} = 0$ の解は $\alpha = \psi(f(z,\bar{z}))$ と書ける, ここで

$$\psi(t) \quad : \quad \psi''(t) - F(\psi(t))\psi'(t)^2 = 0$$

$$f(z,\bar{z}) \quad : \quad M \text{ 上の実数値調和関数.}$$

$\psi(t)$ は 2 つの実定数 c_4, c_5 で定まる.

補題の証明

$\alpha_z \neq 0$ のとき、

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{z\bar{z}} - F(\alpha)\alpha_z\alpha_{\bar{z}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \\
&\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\log \alpha_z - \int F(\alpha)d\alpha\right\} = 0
\end{aligned}
$$

注意 ここに F が α だけの関数であることを使用

The first fundamental form

$$ds^2 = \frac{\psi'(f)^2 |f_z|^2}{|a(\psi(f)) + b|^2} |dz|^2$$

The first fundamental form

$$ds^2 = \frac{\psi'(f)^2 |f_z|^2}{|a(\psi(f)) + b|^2} |dz|^2$$

これらの計算で一般型 x の第一、第二基本形式は一つの調和関数と 5 個の実定数で定まることを示した。

逆

逆が成立する

逆

逆が成立する

領域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, 実数 $b > 0, \rho$ と $\mathbb{D}$ 上の調和関数 $f(z, \bar{z})$ $(f_z \neq 0)$ に対し次を定義する：

$$a(t) : \frac{da}{dt} + \frac{2\cot t}{\overline{a(t)} + b}\left(ba(t) - |a(t)|^2 - \frac{3\rho}{4}\sin^2 t\right) = 0$$

逆

逆が成立する

領域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, 実数 $b > 0, \rho$ と $\mathbb{D}$ 上の調和関数 $f(z, \bar{z})$ $(f_z \neq 0)$ に対し次を定義する：

$$a(t) : \frac{da}{dt} + \frac{2\cot t}{\overline{a(t)} + b}\left(ba(t) - |a(t)|^2 - \frac{3\rho}{4}\sin^2 t\right) = 0$$

$$\psi(t) : \psi''(t) - F(\psi)\psi'(t)^2 = 0 \quad (\psi'(t) \neq 0)$$

逆

逆が成立する

領域 $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$, 実数 $b > 0, \rho$ と $\mathbb{D}$ 上の調和関数 $f(z, \bar{z})$ $(f_z \neq 0)$ に対し次を定義する：

$$a(t) : \frac{da}{dt} + \frac{2\cot t}{\overline{a(t)} + b}\left(ba(t) - |a(t)|^2 - \frac{3\rho}{4}\sin^2 t\right) = 0$$

$$\psi(t) : \psi''(t) - F(\psi)\psi'(t)^2 = 0 \quad (\psi'(t) \neq 0)$$

$$\alpha(z, \bar{z}) := \psi(f(z, \bar{z}))$$

$$a := a(\alpha)$$

補題

$\phi := \frac{\alpha_z}{a(\alpha)+b} dz.$

$$\theta := \frac{1}{2i} \frac{\omega(\alpha, a(\alpha), \overline{a(\alpha)})\phi - \overline{\omega(\alpha, a(\alpha), \overline{a(\alpha)})\phi}}{(|a(\alpha)|^2 + \rho/2(-2 + 3\sin^2\alpha))}$$

は $\mathbb{D}$ 上の閉形式.

c, ds^2

$$\exists\, \nu : \mathbb{D} \to R \text{ s.t. } d\nu = \theta$$

$$c := \left(|a(\alpha)|^2 + \frac{\rho}{2}(-2 + 3\sin^2\alpha) \right)^{1/2} e^{i\nu}$$

$$ds^2 := \phi\bar{\phi}$$

これらの $\{\phi, \alpha, a, c\}$ は Gauss, Codazzi, Ricci 方程式を満たす.

c, ds^2

$$\exists\, \nu : \mathbb{D} \to R \ \text{ s.t. } \ d\nu = \theta$$

$$c := \left(|a(\alpha)|^2 + \frac{\rho}{2}(-2 + 3\sin^2\alpha) \right)^{1/2} e^{i\nu}$$

$$ds^2 := \phi\bar{\phi}$$

これらの $\{\phi, \alpha, a, c\}$ は Gauss, Codazzi, Ricci 方程式を満たす.

よって、∃ 一般型 pmc $(\mathbb{D}, ds^2) \to \overline{M}[4\rho]$.

主定理（K. 2016) の証明終了

c, ds^2

$$\exists\, \nu : \mathbb{D} \to R \ \text{s.t.}\ d\nu = \theta$$
$$c := \left(|a(\alpha)|^2 + \frac{\rho}{2}(-2 + 3\sin^2\alpha) \right)^{1/2} e^{i\nu}$$
$$ds^2 := \phi\bar{\phi}$$

これらの $\{\phi, \alpha, a, c\}$ は Gauss, Codazzi, Ricci 方程式を満たす.

よって、$\exists$ 一般型 pmc $(\mathbb{D}, ds^2) \to \overline{M}[4\rho]$.

主定理（K. 2016) の証明終了

問題 合同でないものはどれだけあるか？　第 3 部で議論する

第2部の要約

(1) $a = \bar{a}$: 非自明な曲面は $\rho < 0$ のときのみ表れる
(K. and Zhou 2000)

第2部の要約

(1) $a = \bar{a}$: 非自明な曲面は $\rho < 0$ のときのみ表れる
(K. and Zhou 2000)

(2) $a \neq \bar{a}$: 第一、第二基本形式は一つの調和関数と5個の実定数で定まる (Hirakawa 2006，K. 2016)

第2部の要約

(1) $a = \bar{a}$: 非自明な曲面は $\rho < 0$ のときのみ表れる
(K. and Zhou 2000)

(2) $a \neq \bar{a}$: 第一、第二基本形式は一つの調和関数と5個の実定数で定まる (Hirakawa 2006, K. 2016)

大域的結果として

(3) ポアンカレ平面から複素双曲平面へ2つの合同でない平均曲率ベクトル平行曲面が存在する (Chen - Vrancken 1997, Hirakawa 2006)

第2部終